JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **30**, 169–172 (1980)

Zur Rationalen Approximation von e^{-x} auf $[0, \infty)$

H.-P. BLATT

Fakultät für Mathematik und Informatik,
Universität Mannheim, 6800 Mannheim, West Germany

UND

D. BRAESS

Institut für Mathematik,
Ruhr-Universität, Bochum, 4630 Bochum, West Germany

Communicated by Richard S. Varga

Received April 11, 1979

It is shown that an approximation of e^{-x} on $[0, \infty)$ by rational functions of degree n cannot be better than 52^{-n}. This improves the bound given by Rahman and Schmeißer, (*J. Approx. Theory* **23** (1978), 246–254; *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 395–402).

Sei Π_k die Menge der reellen Polynome, deren Grad k nicht übersteigt. Dann beschreibt

$$\lambda_{m,n} = \max_{p \in \Pi_m, q \in \Pi_n} \left\| e^{-x} - \frac{p}{q} \right\|$$

die Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0, \infty)$ im Sinne von Tschebyscheff, wenn sich die Norm $\|\cdot\|$ auf die Supremum-Norm bezieht. Bekannt ist das asymptotische Verhalten nur von $\lambda_{0,n}$. Schönhage [4] zeigte 1973 $\lim_{n \to \infty} \lambda_{0,n}^{1/n} = \frac{1}{3}$. Auch im allgemeinen Fall ist keine bessere als geometrische Konvergenz möglich. Dies wurde zuerst von Newman [2] mit dem Nachweis von $\lambda_{n-1,n} > 1280^{-n}$ gezeigt. Rahman und Schmeißer [3] erzielten mit $308^{-n} \leqslant \lambda_{n-1,n} \leqslant 4.08^{-n}$ eine bessere Einschließung. Die untere Schranke soll hier weiter verbessert werden. Da die numerischen Ergebnisse von Cody, Meinardus und Varga [1] auf ein asymptotisches Verhalten von $\lambda_{n-1,n} \sim 9^{-n}$ hindeuten, ist unsere Schranke zweifellos immer noch zu grob.

SATZ. *Für alle natürlichen Zahlen n ist*

$$\lambda_{n-1,n} > 54^{-n}.$$

0021-9045/80/110169-04$02.00/0
Copyright © 1980 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

Beweis. Anstatt e^{-x} werden wir a^{-x} mit $a > 2$ approximieren, wobei a erst später festgelegt wird. Es sei $p \in \Pi_{n-1}$, $q \in \Pi_n$ und

$$\left| a^{-x} - \frac{p(x)}{q(x)} \right| \leqslant \rho \qquad \text{für} \quad x \in [0, 2n]. \tag{1}$$

Normieren wir q auf den ganzen Zahlen zwischen 0 und $2n$ gemäß

$$\max_{0 \leqslant \nu \leqslant 2n} 2^{-\nu} |q(\nu)| = 1, \tag{2}$$

so erhalten wir für $r(x) := q(x) - a^x p(x)$, $x = 0, 1,..., 2n$ aus (1):

$$|r(x)| \leqslant \rho a^x \, |q(x)| \leqslant \rho(2a)^x. \tag{3}$$

Sei E der Verschiebungsoperator, der gemäß $Ef(x) = f(x+1)$ operiert, I die Identität und $\Delta = E - I$ der Differenzenoperator. Aus (3) erhält man für $x = 0, 1,..., n$:

$$\begin{aligned} |(E - aI)^n \, q(x)| &= |(E - aI)^n \, [q(x) - a^x p(x)]| \\ &\leqslant (E + aI)^n \, |r(x)| \\ &\leqslant \rho(3a)^n \, (2a)^x. \end{aligned} \tag{4}$$

Man beachte, daß $S(x) := (E - aI)^n \, q(x)$ ein Polynom ist. Deshalb bricht die Reihe, die man aus der Potenzreihe für $(1 - x)^{-n}$ zur Inversion von $(E - aI)^n$ gewinnt, bereits nach endlich vielen Gliedern ab. Es ist

$$\begin{aligned} q(x) &= (E - aI)^{-n} \, S(x) \\ &= (1 - a)^{-n} \cdot \left(I - \frac{1}{a-1} \Delta \right)^{-n} S(x) \\ &= (1 - a)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j-1}{j} \frac{\Delta^j S(x)}{(a-1)^j} \end{aligned}$$

Bei Anwendung des Differenzenoperators Δ^k für $k = 0, 1,..., n$ entfallen wieder k Terme:

$$\Delta^k q(x) = (1 - a)^{-n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{\Delta^{j+k} S(x)}{(a-1)^j}.$$

Aus (4) folgt nun $|\Delta^m S(0)| \leqslant \rho(3a)^n (1+2a)^m$ und für $k = 0, 1,..., n$:

$$\begin{aligned}
|\Delta^k q(0)| &\leqslant \rho \left(\frac{3a}{a-1}\right)^n \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{(1+2a)^{j+k}}{(a-1)^j} \\
&< \rho \left(\frac{3a}{a-1}\right)^n (1+2a)^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{1}{(a-1)^j} \\
&= \rho \left(\frac{3a}{a-1}\right)^n (1+2a)^n \left[1 - \frac{1}{a-1}\right]^{-n} \\
&= \rho \frac{(3a)^n (1+2a)^n}{(a-2)^n}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Für $k > n$ verschwinden die Differenzenquotienten. Deshalb erhalten wir schließlich aus (5) für jede natürliche Zahl $\nu \geqslant 0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|q(\nu)| &= |(I+\Delta)^\nu q(0)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} |\Delta^k q(0)| \\
&< \rho \frac{(3a)^n (1+2a)^n}{(a-2)^n} 2^\nu. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Setzt man $a = 4$, führt dies zu $|q(\nu)| < \rho \cdot 54^n \cdot 2^\nu$. Wegen der Normierung (2) muß also

$$\rho > 54^{-n}$$

sein. ∎

Eine geringfügig schärfere Schranke erzielt man noch durch eine Variation von a und den versteckten Parametern. Man modifiziert den Vorgang, mit dem Formel (5) gewonnen wurde. Für $c > 1$ ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{c^{j+k}}{(a-1)^j} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n+j-1}{j} \frac{((4/3)c)^{j+k}}{[(4/3)(a-1)]^j} \\
&\leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{4}{3}c\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j} \frac{1}{[(4/3)(a-1)]^j} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} c^n \left(\frac{a-1}{a-7/4}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ersetzt man die Normierung (2) durch $\max\{(\frac{7}{4})^{-\nu}|q(\nu)|\} = 1$, so erhält man anstatt von (6):

$$|q(\nu)| < \rho\left(\frac{11}{3}\cdot\frac{a(4+7a)}{4a-7}\right)^n\left(\frac{7}{4}\right)^\nu.$$

Die Wahl $a = 15/4$ führt zu

$$\lambda_{n-1,n} > (6655/128)^{-n} > 52^{-n}.$$

Literatur

1. W. J. Cody, G. Meinardus, and R. S. Varga, Chebyshev rational approximations to e^{-x} in $[0,\infty)$ and applications to heat-conduction problems, *J. Approx. Theory* **2** (1969), 50–65.
2. D. J. Newman, Rational Approximation to e^{-x}, *J. Approx. Theory* **10** (1974), 301–303.
3. Q. I. Rahman and G. Schmeisser, Rational Approximation to e^{-x}, *J. Approx. Theory* **23** (1978), 246–254; und *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 395–402.
4. A. Schönhage, Zur rationalen Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0,\infty[$, *J. Approx. Theory* **7** (1973), 395–398.